Corrigés des exercices 3.1 à 3.7 — حلول التمارين من 1.3 إلى 7.3

Exercice 3.1:

Si l'expression du vecteur en coordonnées cartésiennes est $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, alors, il est possible d'écrire l'expression du même vecteur en coordonnées polaires sous la forme : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$. Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}_\varphi$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on peut déterminer les valeurs V et V_φ.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

En organisant la dernière équation :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)$$

Ainsi nous aboutissons à un système de deux équations à deux inconnues V et V_φ :

$$\begin{cases} V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi = X \\ V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi = Y \end{cases}$$

Après résolution on trouve :

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;\; ; \;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V}$ est donc :

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

Nous constatons que, pour trouver les deux résultats précédents, il y a beaucoup de calculs à faire si on suit la méthode algébrique ordinaire. Il est plus facile et plus rapide si on opte pour la méthode des matrices. Rappelons brièvement cette dernière méthode :
On part de l'étape où nous avons obtenu les deux équations :

$$X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$

Nous créons une matrice de déplacement :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Le résultat est :

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;\; ; \;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ en coordonnées polaires est donc :

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

Exercice 3.2:

Le vecteur s'écrit : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, il s'écrit $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Rappelons-nous des expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

D'où en remplaçant :

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) +$$
$$V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons et organisons la dernière équation pour trouver l'expression du vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) +$$
$$\vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

Les coordonnées cartésiennes sont :

$$X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$
$$Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta$$

Le vecteur $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$ s'écrit donc dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\boxed{\vec{V} = \left(V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi\right)\vec{j} + \left(V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta\right)\vec{k}}$$

<u>Exercice 3.3</u>:

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_\rho = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \\ \vec{u}_z = \vec{k}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

En organisant l'expression obtenue elle devient :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

On obtient un système d'équations de trois équations à trois inconnues V_ρ, V_φ et V_z

$$\begin{cases} X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_z \end{cases}$$

On a le droit de choisir la méthode que nous maîtrisons le mieux pour arriver au résultat attendu. Si on choisit la méthode des matrices le raisonnement est le suivant :

On crée une matrice de déplacement à partir du système d'équations obtenu :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Le résultat se déduit directement :

$$\boxed{V_\rho = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi} \;;\; \boxed{V_z = Z}$$

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_\rho + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi + Z\vec{u}_z}$$

Exercice 3.4:

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on peut écrire :

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) +$$
$$V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons puis organisons l'équation précédente pour obtenir :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) +$$
$$\vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

On constitue un système de trois équations à trois inconnues V , V_θ et V_φ :

$$\begin{cases} X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta \end{cases}$$

Si on choisit la méthode des matrices, qui a fait preuve d'à aboutir au résultat escompté très facilement et très rapidement, on doit d'abord construire la matrice de déplacement à partir du système d'équations précédent :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$\boxed{V_r = X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta} \;;\; \boxed{V_\theta = X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta}$$

$$\boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

En fin de compte l'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ en coordonnées sphériques est :

$$\vec{V} = \left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi$$

Exercice 3.5:

Commençons par transformer le vecteur $\vec{B} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = \rho^2\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + \cos\varphi\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right)$$

En développant et en organisant l'équation, nous obtenons l'expression du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = \vec{i}\left(\underbrace{\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{0}_{Z}\vec{k}$$

$$X = \rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi \;;\; Y = \rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi \;;\; Z = 0$$

On doit maintenant transformer cette dernière expression en coordonnées sphériques en faisant appel au résultat de l'exercice 3.4 :

$$\vec{A} = \left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer X, Y, Z par leurs valeurs respectives trouvées ci-dessus :

$$\begin{aligned}\vec{A} = &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_r + \\ &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi\right)\cos\theta\cos\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_\theta + \\ &\left[\left(-\rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\varphi + \left(\rho^2\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\varphi\right]\vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

Exercice 3.6:

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ est $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$. Partant des expressions connues des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

Organisée elle devient :

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

Par identification nous arrivons à :

$$X = V_r \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi$$
$$Y = V_r \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi$$
$$Z = V_z$$

Le résultat final est : $\boxed{\vec{V} = \vec{i}\left(V_r \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi\right) + \vec{j}\left(V_r \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi\right) + \vec{k}V_z}$

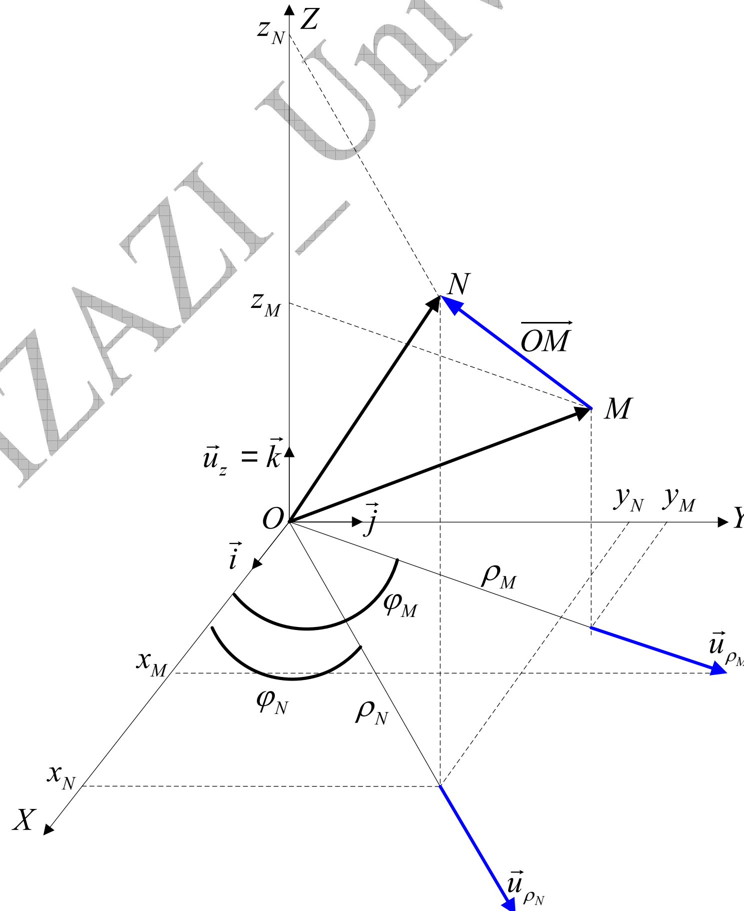
Exercice 3.7:

1/ Première méthode : Trouver la distance entre les deux points $M(\rho_M, \varphi_M, z_M)$ et $N(\rho_N, \varphi_N, z_N)$ en transformant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes.

La figure montre que la distance entre les points M et N est égale au module du vecteur $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} + z_N \vec{u}_z\right) - \left(\rho_M \vec{u}_{\rho_M} + z_M \vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} - \rho_M \vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N \vec{u}_z - z_M \vec{u}_z\right) \rightarrow (1)$$



Expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ et $\vec{u}_z$:

$$\vec{u}_{\rho_N} = \vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N$$

$$\vec{u}_{\rho_M} = \vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M$$

$$\vec{u}_z = \vec{k}$$

Remplaçons $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ dans l'équation (1) :

$$\overrightarrow{MN} = \rho_N\left(\vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N\right) - \rho_M\left(\vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M\right) + \left(z_N\vec{u}_z - z_M\vec{u}_z\right)$$

Nous organisons l'équation pour qu'elle devienne :

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N\cos\varphi_N - \rho_M\cos\varphi_M\right)\vec{i} + \left(\rho_N\sin\varphi_N - \rho_M\sin\varphi_M\right)\vec{j} + \left(z_N - z_M\right)\vec{k}$$

La distance entre les points M et N st égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$:

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\left(\rho_N\cos\varphi_N - \rho_M\cos\varphi_M\right)^2 + \left(\rho_N\sin\varphi_N - \rho_M\sin\varphi_M\right)^2 + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

Après calculs nécessaires on trouve :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^2 + \rho_M^2 - \left[2\rho_N.\rho_M\left(\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M\right)\right] + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (2)$$

2/ <u>Deuxième méthode</u> : trouver la distance entre les points $M\left(\rho_M, \varphi_M, z_M\right)$ et $N\left(\rho_N, \varphi_N, z_N\right)$ par le calcul direct :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N} + z_N\vec{u}_z\right) - \left(\rho_M\vec{u}_{\rho_M} + z_M\vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N} - \rho_M\vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N - z_M\right)\vec{u}_z$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^2 + \rho_M^2 - 2\rho_N.\rho_M\cos(\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}) + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

D'après la figure, nous voyons que l'angle compris entre les deux vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ est égal à $\varphi_N - \varphi_M$. Nous obtenons donc:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^2 + \rho_M^2 - 2\rho_N.\rho_M\cos(\varphi_N - \varphi_M) + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (3)$$

Pour vérifier que les deux résultats (2) et (3) sont compatibles, il suffit de procéder à une transformation trigonométrique adéquate de l'équation (2) :

$$\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M = \cos\left(\varphi_N - \varphi_M\right) = \cos\left(\varphi_M - \varphi_N\right)$$